EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….**094**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{3+2i}{2+3i}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,2,8)$ la planul $x+2y+3z-9=0$ **.**

(4p) **c)** Să se determine punctele de intersecție dintre cercul $x^2+y^2=1$ și dreapta $x=2y$.

(4p) **d)** Să se arate că $\cos 1 > \cos 2$.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(1,3)$, $B(3,1)$ și $C(-1,-1)$**.**

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3 = a+bi \quad .$$

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze $\log_2 \sqrt{8}$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x}\in \mathbf{Z_4}$ să verifice relația $\hat{x}^3=\hat{1}$.

(3p) **c)** Să se determine numărul de mulțimi X care verifică $\{1,2\}\subseteq X\subseteq\{1,2,3,4,5\}$

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x+25^x=30$.

(3p) **e)** Să se calculeze produsul rădăcinilor polinomului $f=X^3+X-2$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=3x-\text{arctg}\, x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{4x^3}{x^4+1}dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se calculeze matricele $P+Q$ şi $(P+Q)^2$.

(4p) **b)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei P.

(4p) **c)** Să se arate că $\det(A+B)+\det(A-B)=2(\det(A)+\det(B))$, $\forall A,B \in M_2(\mathbf{R})$.

(2p) **d)** Să se arate că, dacă $x,y,a,b \in \mathbf{R}$ şi $x+y=2(a+b)$, atunci $x \geq a+b$ sau $y \geq a+b$.

(2p) **e)** Să se arate că $\forall A,B \in M_2(\mathbf{R})$, avem $\det(A+B) \geq \det(A)+\det(B)$ sau $\det(A-B) \geq \det(A)+\det(B)$.

(2p) **f)** Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}^*$ şi $\forall A_1, A_2, ..., A_n \in M_2(\mathbf{R})$, există o alegere a semnelor astfel încât $\det(A_1 \pm A_2 \pm ... \pm A_n) \geq \det(A_1)+\det(A_2)+...+\det(A_n)$.

(2p) **g)** Să se arate că există o alegere a semnelor + şi – astfel încât

$$(\cos 1 \pm \cos 2 \pm ... \pm \cos 2007)^2 + (\sin 1 \pm \sin 2 \pm ... \pm \sin 2007)^2 \geq 2007$$

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţiile $f_n, g_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \operatorname{arctg} x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} ... + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} \right)$

şi $g_n(x) = f_n(x) + \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$, unde $n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f_n(0)$ şi $g_n(0)$.

(4p) **b)** Să se verifice identitatea $1+(-x^2)+(-x^2)^2+...+(-x^2)^k = \frac{1-(-x^2)^{k+1}}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **c)** Să se arate că $f_n'(x) = \frac{-x^{4n-2}}{1+x^2}$ şi $g_n'(x) = \frac{x^{4n}}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **d)** Să se arate că: $f_n(x) < 0 < g_n(x)$, $\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$.

(2p) **f)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = 0$, $\forall x \in [-1,1]$.

(2p) **g)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} \right) = \operatorname{arctg} x$ $\forall x \in [-1,1]$.

(2p) **h)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} - ... + \frac{1}{(4n-3)(4n-2)} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.